498. 常微分方程式ノ解ノ單獨條件ニツイテ

佐藤　徳意（札幌）

常微分方程式

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ノ解ノ單独性ガ其ノ初期條件ニ essential ニ關係スル場合ノアルコトガ方程式

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}+a$$

カラ福原先生ニ見出サレタ（第40号）。又ソノヤウナ場合ノ單独條件モ共ニ與ヘラレタ（第43, 48号）。

ココデハソノ外ニ二、三ノ條件ヲ出シテ見タイト思ヒマス。

函数 $f(x,y)$, $G(x,y)$ ハ $0\leqq x<a$, $|y|<b$ デ有界連續デ, $G(x,y)$ ハ高々可附番ケノ点ヲ除イテハ正デアルトスルト, 証明ハ略シマスガ次ノ定理ヲ得マス。

定理1.

" $(L)\int_{-b}^{b} D^{+}_{x} G(x,y)\,dy$ ガ存在シテ,

$$G(x,y)f(x,y_1)\leqq G(x,y_2)f(x,y_2)$$

$$(y_1>y_2)$$

$$D^{+}_{x}G(x,y)\leqq K\,G(x,y)\qquad (K \text{ ハ負デナイ常数})$$

デアルナラバ, 微分方程式(1)ノ初期條件

$$(2)\qquad y(0)=0$$

ヲ満ス解ハ只一ツデアル。"

$f(x, y) \neq 0$ デアルナラバ，$f(x, y) > 0$ ト假定シテモ一般性ヲナクシナイカラ $f(x, y) > 0$ ト假定スル。ソコデ $G(x, y)$ トシテ

$$G(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

ヲトルコトガ出来ル、ソノ時ハ

$$D_x^{\pm} G(x, y) = -\frac{1}{f(x, y)^2} D_x^{\pm} f(x, y)$$

トナルカラ

定理 2.

"$(L)\int_{-b}^{b} D_x^{\pm} f(x, y)\, dy$ ガ存在シ

$$-D_x^{\pm} f(x, y) \leqq K f(x, y)$$

デアルナラバ (1) ノ (2) ヲ満ス解ハ只一ツデアル。"

ヲ得ル。コレカラ

系 1.

"$(L)\int_{-b}^{b} D_x^{\pm} f(x, y)\, dy$ ガ存在シ

$$D_x^{\pm} f(x, y) \geqq C \qquad (C\text{ハ常数})$$

デアルナラバ (1) ノ (2) ヲ満ス解ハ只一ツデアル。"

若シ $f(x, y)$ ガ x ニ関シテ *Lipschitz* ノ條件

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

ヲ満タスナラバ

$$|D_x^{\pm} f(x, y)| \leqq L$$

デ且ツ

$$(\mathrm{L})\int_{-b}^{b}\underline{D}_{x}^{+}f(x,y)\,dy$$

ガ存在スルカラ

系2.

"$f(x,y)$ ガ Lipschitz ノ條件ヲ滿タスナラバ(1)ノ(2)ヲ滿ス解ハ只一ツデアル。"

ヲ得ル。

$g(x,y)$ ハ $0 \leqq x < a,\ |y| < b$ デ連續ナ函數トスルト定理ノカラ求積法デノ變數分離ノ場合ノ擴張ニ當ル。

定理3.

"$f(x,y)$ ハ定理2ノ條件ヲ滿シ

$$g(x,y_1) \leqq g(x,y_2) \qquad y_1 > y$$

デアルナラバ微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\,g(x,y)$$

ノ(2)ヲ滿ス解ハ只一ツデアル。"

ヲ得ル。同ジ樣ニシテ

系1.

$$\frac{g(x,y_1)}{f(x,y_1)} \leqq \frac{g(x,y_2)}{f(x,y_2)} \qquad y_1 > y_2$$

デアルナラバ微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) + g(x,y)$$

ノ(2)ヲ満ス解ハ只一ツデアル。"
ガ出ル。特ニ

$$g(x,y)\equiv h$$

ニトリ、先生ノ変換ノ仕方ニヨルト(第48号)コレカラ

系2.

"$F(x,y)$ ハ $0\leqq x<a$, $|y|<b$ デ連続デ

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)\leqq F(x,y_1)-F(x,y_2)$$

$$y_1>y_2$$

デアルモノトス。

若シ $(\mathrm{L})\int_{-b}^{b}\underline{D}_x^+F(x,y)\,dy$ ガ存在シ

$$-\underline{D}_x^+F(x,y)\leqq KF(x,y)$$

$$F(x,y_1)\geqq F(x,y_2)\qquad y_1>y_2$$

デアルナラバ(1)ノ(2)ヲ満ス解ハ只一ツデアル。"
ヲ得ル。

$f(x,y)\neq 0$ デアルトキハ幾何デ dual ナ定理ガ對應スルヤウニ今迄知ラレテヰル單独條件ニ對應スルモノガ得ラレル。ソレニハ次ノ定理ガ役立ツ。

定理4.

"微分方程式(1)ノ右辺 $f(x,y)$ ガ $(0,0)$ ノ近傍デ連続デ $f(0,0)\neq 0$ デアルナラバ、(2)ヲ満タス解ガ只一ツデアルタメニ必要デ十分ナ條件ハ微分方程式

$$\frac{dx}{dy}=g(y,x)$$

ガ初期條件

$$x(0)=0$$

ヲ満ス解ガ只一ツデアルコトナリ。

コヽニ

$$g(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}$$

ヲ表ス。"

逆函數ノ存在定理ヲ用フルト容易ニ出ルノガ福原先生ニヨル。

コノ定理カラ知ラレタ定理ト定理2，系2トガ對應スルコトガ分ル。